

1.  $f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$  funtzioa emanda:

- Azaldu zer den izate-eremuaren kontzeptua. Zein da  $f$  funtzioaren izate-eremua? Grafikoki adierazi.
- Esan  $f$ -ren izate-eremua multzo irekia, itxia, bornatua eta konbexua den ala ez, erantzunak arrazoituz.
- Azaldu zer den maila-kurba bat, eta  $f$  funtzioaren maila-kurba generikoa idatzi.  $K = -1, 0, 1$  eta  $2$  mailako kurbak marraztu.
- $f$  funtzioaren hurbilketa lineala kalkulatu  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  puntuaren inguruan. Zein da funtzioaren gutxi gora beherazko balioa  $(1'1, 1'1)$  puntuan? Zein da benetako balioa puntu honetan (bost dezimal adierazi)? Zenbateko akatsa egiten da hurbilketa linealaren bidez kalkulatzekoan?
- $f(x, y)$  funtzioa homogeneoa da? Erantzuna arrazoitu.

(3 puntu)

2.-  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$  ekuazioak, definitzen al du  $y = f(x)$  funtzio implizitua  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  puntuaren inguruan? Hala bada, funtzio implizituen deribazioa erabiliz,  $f''(1)$  kalkulatu.

(1,5 puntu)

3.- Enpresa batek A eta B artikulua egiten ditu,  $x$  eta  $y$  kopurutan, horietako bakoitzaren prezioa izanik:

$$P_x = 65 - x - y$$

$$P_y = 90 - x - 2y$$

Kostu totala honakoa da:  $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$

- Mozkina maximizatzeko  $x$  eta  $y$  kopuruak aurkitu.
- Demagun ondasun horiek ekoizteko T lehengaia behar dela, eta gehienez 15 unitate daudela erabilgarri. A-ren unitate bakoitzak eta B-ren unitate bakoitzak T lehengai horretako unitate bat behar badute, zein da soluzioa? (Oharra: Lagrangeren biderkatzaileen metodoaz egin)
- T unitate gehigarri baten kostua 16 m.u.koa balitz, onuragarria litzateke erostea ekoizpen-prozesuan sartzeko?

(2 puntu)

4.- Enpresa batek bi artikulua ekoizten ditu, A: kristalezko ateak aluminioko markoarekin, eta B: leihoak egurrezko markoarekin. Enpresak hiru lantegi ditu:

Lehen lantegian, aluminioko markoak egiten dira

Bigarren lantegian, egurrezko markoak egiten dira

Hirugarren lantegian, kristala ekoizten da eta ateak eta leihoak muntatzen dira.

Aluminiko marko bakoitzak ordu 1 behar du ekoizteko, eta egurrezko marko bakoitzak 2 ordu. Ate bakoitzaren kristala egiteko eta muntaketarako 3 ordu behar dira, eta leiho bakoitzaren kristala eta muntaketarako, 2 ordu.

Lehen lantegian 4 ordu erabilgarri daude, bigarrenean, 12 ordu, eta hirugarrenean, 18 ordu.

Ate bakoitzak 300 €ko mozkina ematen du, leiho bakoitzak, 500 €koa.

- Ekoizlearentzat problemaren helburua eta aldagaiak zein diren esan
- Programazio linealeko problema planteatu, eta ebatzi
- Duala planteatu eta lasatze osagarriaren teoremaz ebatzi
- Zein lantegitan litzateke egokiagoa denbora erabilgarria handitu? Zergatik?

(3,5 puntu)